



TITLE:

# 単位円板上でのKAM理論 (偏微分方程式と時間周波数解析)

AUTHOR(S):

亀谷, 睦

---

CITATION:

亀谷, 睦. 単位円板上でのKAM理論 (偏微分方程式と時間周波数解析). 数理解析研究所講究録 2004, 1385: 77-93

ISSUE DATE:

2004-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25767>

RIGHT:

# 単位円板上での KAM 理論

亀谷 睦 (Makoto Kametani)

舞鶴工業高等専門学校 (Maizuru College of Technology)

## 1 はじめに

KAM 理論の“KAM”とは、この理論を作り出した 3 人の数学者である Kolmogorov, Arnold, Moser の頭文字に由来している。ごく大雑把に云うなら、KAM 理論とは、可積分系（非摂動系）に近い力学系（摂動系）に対して、元の非摂動系が持つ性質が摂動系においてもどれくらい成立するか、という問に答える理論である。

たとえば、自由度が  $n$  の可積分ハミルトン系、すなわち系の自由度に等しい個数の 1 次独立な第 1 積分をもつハミルトン系は、 $n$  次元の不変集合からなる族  $\{X_\nu\}$  によって相空間全体が埋め尽くされ、各  $X_\nu$  上での系の運動は振動数  $\nu$  の条件周期的な運動となることが知られている。1950 年代の半ばに Kolmogorov [4] は、この可積分系をハミルトン的に少し摂動するとき、各  $X_\nu$  は存在し続けるか？ との問を立て、それに対し、振動数  $\nu$  がディオファントス条件を満たすような  $X_\nu$  は摂動後も少し変形されるだけで存在し続けるだろうとの予想を述べた。その後、この予想は彼の弟子である Arnold [1], [2] によって証明された。

彼らは問題を解析的なカテゴリで扱ったが、Moser [6] は同種の問題を  $C^\infty$  あるいは  $C^m$  のカテゴリで解いた。これらの原論文は 1960 年代半ばまでに出版されたが、その後、60 年代後半から 70 年代初めにかけて、Arnold-Avez [3] や Siegel-Moser [7] などの教科書が出版された。また、その後の KAM 理論の発展と、その理論のシュレジンガー方程式の固有関数の準古典近似（Maslov 理論）への応用を述べた Lazutkin の教科書 [5] が、90 年代前半に出版された。

さて、この論文の構成を述べよう。第 2 節では、Siegel-Moser による一つの結果 ([7] の第 32 ~ 33 節) を紹介する。そこでは、2 次元円環上のツイスト写像の実解析的な摂動  $M$  に対し、 $M$ -不変集合の存在が議論されている。続く第 3 節で、そのアナロジーとして、我々の問題設定と結果を述べる。つまり、単位円板とその上に作用する一次分数変換の群に対し、Siegel-Moser と同様にツイスト写像を考え、その摂動に対して、[7] と類似の結果が成り立つことを主張する。そして最後の第 4 節で、我々の結果の証明の大筋を述べる。

## 2 Siegel-Moserの結果

この節では, Siegel-Moser による一つの結果を紹介する. 2次元円環  $A$  を考え, 極座標  $(r, \theta)$  を用いて  $A = \{(r, \theta) : a < r < b, -\infty < \theta < \infty\}$  と表す ( $0 < a < b$ ). このとき,

$$\tau(r, \theta) = (r, \theta + r) \quad (r, \theta) \in A \quad (2.1)$$

によって定まる写像  $\tau: A \rightarrow A$  を  $A$  上のツイスト写像と呼ぶ. ツイスト写像は次のような著しい性質をもつ: 各  $\omega \in (a, b)$  に対して, 原点を中心とする半径  $\omega$  の円周を  $S_\omega$  とするとき, すべての  $S_\omega$  は  $\tau$ -不変な集合であり, 相空間  $A$  は, これらの族  $\{S_\omega\}$  によって埋め尽くされている. この意味で, ツイスト写像が  $A$  上に定める離散力学系は可積分系となる.

さて, (2.1) のツイスト写像  $\tau$  の摂動として, 次の

$$M(r, \theta) = (r + f(r, \theta), \theta + r + g(r, \theta)) \quad (2.2)$$

で定まる写像  $M$  を考える. ただし,  $f$  と  $g$  は  $A$  上の実解析的関数で, 角変数  $\theta$  について周期  $2\pi$  の周期関数だとする.

Siegel-Moser の結果を正確に述べるには, 以下の2つの定義が必要となる:

**定義 1** 実数  $\omega$  がディオファントス条件を満たすとは, ある2つの正定数  $C_0, \mu$  が存在して, すべての自然数  $p$  とすべての整数  $q$  に対して

$$\left| \frac{\omega}{2\pi} p - q \right| \geq C_0 p^{-\mu} \quad (2.3)$$

が成り立つときをいう.

**定義 2** 写像  $M$  が円環  $A$  において交差性質を持つとは, すべての円周  $S_\omega$  と ( $A$  内において) ホモトピックであるような  $A$  内の任意の閉曲線  $\gamma$  に対し,

$$M(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset$$

が成り立つときをいう.

さらに, 写像  $M$  が自然に複素化できることに注意しよう. 実際,  $\omega \in (a, b)$  を任意に一つ固定する. 円周  $S_\omega$  の複素近傍  $A(s, \rho)$  を

$$A(s, \rho) := \{(r, \theta) \in \mathbb{C}^2 : |r - \omega| < s, |\operatorname{Im} \theta| < \rho\} \quad (2.4)$$

により定める ( $s, \rho > 0$ ). 仮定によって,  $f, g$  は実解析的かつ  $\theta$  について周期  $2\pi$  の周期関数だから, 正数  $s_0, \rho_0$  を十分小さくとれば, 写像  $M$  は  $A(s_0, \rho_0)$  において正則だと仮定してよい.

以上の準備の下で, Siegel-Moser の結果を述べると

**定理 1 (Siegel-Moser)**  $\omega$  はディオファントス条件を満たし、写像  $M$  は交差性質を持ち、 $A(s_0, \rho_0)$  において正則だと仮定する。このとき、任意の正数  $\varepsilon$  に対し、 $\varepsilon$  と式 (2.3) の  $C_0, \mu$  および  $s_0, \rho_0$  にのみ依存する正数  $\delta$  が存在して、

$$\sup_{A(s_0, \rho_0)} (|f| + |g|) \leq \delta$$

を満たすようなすべての  $M$  について、以下の (1) から (3) までは成り立つ：

(1)  $M$  は次の形の不変集合  $S$  を持つ。

$$S = \{(r, \theta) \in \mathbb{C}^2 : r = \omega + p(\xi), \theta = \xi + q(\xi), \xi \in \bar{B}\}. \quad (2.5)$$

ただし、 $B = \{\xi \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \xi| < 2^{-1} \rho_0\}$  であり、 $p(\xi), q(\xi)$  は  $B$  において正則かつ  $\bar{B}$  において連続な、周期  $2\pi$  の周期関数である。

(2)  $S$  は次の意味で円周  $S_\omega$  の複素化  $\{\omega\} \times \bar{B}$  に近い：

$$\sup_{\bar{B}} (|p| + |q|) \leq \varepsilon.$$

(3)  $S$  上での  $M$  の作用と  $\{\omega\} \times \bar{B}$  でのツイスト写像の作用  $\xi \mapsto \xi + \omega$  は互いに共役である。すなわち、すべての  $\xi \in \bar{B}$  に対して

$$M(\omega + p(\xi), \xi + q(\xi)) = (\omega + p(\xi + \omega), \xi + \omega + q(\xi + \omega)) \quad (2.6)$$

が成り立つ。

**注意.**  $M$  が交差性質を持たないとき、定理の結論を満たす (2.5) の形の  $M$ -不変集合  $S$  は存在するとは限らない。反例は、 $c$  を正定数として、(2.2) において

$$f(r, \theta) = c, \quad g(r, \theta) = 0 \quad (2.7)$$

としたときの  $M$  により与えられる。

この  $M$  は交差性質をもたない。実際、閉曲線  $\gamma = S_\omega$  に対して  $M(\gamma) = S_{\omega+c}$  であるから、 $M(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$  となる。

さらに、この  $M$  が定理の結論を満たす  $M$ -不変集合  $S$  をもたないことは、次のようにしてわかる。背理法によることにして、定理の結論を満たす  $M$ -不変集合  $S$  が (ある  $\omega$  に対して) 存在したと仮定する。関数  $\operatorname{Rep}(\xi)$  は閉集合  $\bar{B}$  において連続かつ周期  $2\pi$  の周期関数であるから、この関数には  $\bar{B}$  における最大値  $\operatorname{Rep}(\xi_0)$  が存在する。この  $\xi_0$  に対応する  $S$  の点を  $(r_0, \theta_0) = (\omega + p(\xi_0), \xi_0 + q(\xi_0))$  とすると、(2.6) から

$$M(r_0, \theta_0) = (\omega + p(\xi_0 + \omega), \xi_0 + \omega + q(\xi_0 + \omega)).$$

一方、(2.7) から、

$$M(r_0, \theta_0) = (\omega + c + p(\xi_0), \xi_0 + \omega + p(\xi_0) + q(\xi_0)).$$

これら 2 式の右辺の  $r$ -成分を比較して,  $p(\xi_0 + \omega) = c + p(\xi_0)$ , したがって

$$\text{Rep}(\xi_0 + \omega) = c + \text{Rep}(\xi_0) > \text{Rep}(\xi_0).$$

これは,  $\text{Rep}(\xi_0)$  が最大値であることに反する.

定理 1 の証明の詳細は [7] に譲るが, その大筋だけをスケッチすると次のようになる. 証明はいわゆる Newton 法による. つまり,  $X_0 = A(s_0, \rho_0)$  から出発して, 円周  $S_\omega$  の複素近傍の減少列  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  を

$$X_n = A(s_n, \rho_n) = \{(r, \theta) \in \mathbb{C}^2 : |r - \omega| < s_n, |\text{Im}\theta| < \rho_n\}$$

の形で構成する. ただし, 正数列  $\{s_n\}, \{\rho_n\}$  は

$$s_n \rightarrow 0, \quad \rho_n = 2^{-1}\rho_0(1 + 2^{-n}) \rightarrow 2^{-1}\rho_0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるように定める. さらに, 各第  $n$  ステップにおいて,  $X_n$  と  $X_{n+1}$  の間を  $X_n \supset X_n^{(1)} \supset X_n^{(2)} \supset X_n^{(3)} \supset X_{n+1}$  と補間する集合  $X_n^{(\nu)}$  をとり, 恒等変換に近い座標変換の列  $\{U_n\}_{n=0}^\infty$  と正則写像の列  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  を

$$\begin{aligned} U_n(r, \theta) &= (r + u_n(r, \theta), \theta + v_n(r, \theta)) \\ M_n(r, \theta) &= (r + f_n(r, \theta), \theta + r + g_n(r, \theta)) \\ M_0(r, \theta) &= M(r, \theta) \end{aligned}$$

であって, 次の図式が定義できてかつ可換になるように, 構成する:

$$\begin{array}{ccccc} X_{n+1} & \xrightarrow{U_n} & X_n^{(3)} & \xrightarrow{i_n} & X_n \\ M_{n+1} \downarrow & & \downarrow M_n & & \downarrow M_n \\ X_n^{(1)} & \xleftarrow{U_n^{-1}} & X_n^{(2)} & \xrightarrow{j_n} & X_{n-1}^{(1)} \end{array}$$

ただし,  $i_n, j_n$  はそれぞれ包含写像である.

このとき, crucial なのは次の二つの命題が成立することである:

**命題 1**  $n \rightarrow \infty$  のとき, 次が成り立つ:

$$\sup_{X_n} (|f_n| + |g_n|) \rightarrow 0.$$

**命題 2**  $V_n := U_0 U_1 \cdots U_n$  と置くと, 列  $\{V_n : X_{n+1} \rightarrow X_0\}$  は, それらの定義域の共通部分

$$\bigcap_{n=0}^\infty X_{n+1} = \{\omega\} \times \bar{B}$$

において, 一様収束する.

今, これら二つの命題が示せたとすると,  $M_n U_n = U_n M_{n+1}$  から得られる関係式  $M V_n = V_n M_{n+1}$  を  $\{\omega\} \times \bar{B}$  上に制限して,  $n \rightarrow \infty$  とすると, 命題 1 から,

$$M_{n+1}|_{\{\omega\} \times \bar{B}} \rightarrow \tau|_{\{\omega\} \times \bar{B}}.$$

一方, 命題 2 から,

$$V_n|_{\{\omega\} \times \bar{B}} \rightarrow \exists V_\infty.$$

したがって, 任意の  $\xi \in \bar{B}$  に対して,

$$M V_\infty(\omega, \xi) = V_\infty \tau(\omega, \xi) = V_\infty(\omega, \xi + \omega) \quad (2.8)$$

となる. ここで,  $V_n(r, \theta) = (r + p_n(r, \theta), \theta + q_n(r, \theta))$  と表せば,

$$V_\infty(\omega, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(\omega, \xi) = (\omega + p(\xi), \xi + q(\xi))$$

となる  $B$  上の正則関数  $p(\xi), q(\xi)$  が存在することがわかる. したがって, (2.8) は

$$M(\omega + p(\xi), \xi + q(\xi)) = (\omega + p(\xi + \omega), \xi + \omega + q(\xi + \omega))$$

の成立を意味し, これより定理 1 の (1) と (3) がいえる. さらに, 定理中の  $\delta$  を小さく絞ることによって, 各  $U_n$  の恒等変換への近さを十分小さくして, それらの合成である  $V_n$  も恒等変換に任意に近いようにでき, これより定理 1 の (2) も従うことがいえる.

### 3 単位円板上でのアナロジー

前節では, 円環  $A = (a, b) \times S^1$  上でのツイスト写像を考えたが, ツイスト写像自身は  $\mathbf{R} \times S^1$  上で定義できる:

$$\tau(r, \theta) = (r, \theta + r), \quad (r, \theta) \in \mathbf{R} \times S^1.$$

そして, ツイスト写像を  $\mathbf{R} \times S^1$  上の写像と見なす方が, ある意味でより自然である. というのは,  $\mathbf{R}$  は円周  $S^1$  に作用する Lie 群であり, こう考えると, より一般的な状況, つまり位相空間  $X$  に Lie 群  $G$  が作用しているという状況で,  $G \times X$  上のツイスト写像  $\tau: G \times X \rightarrow G \times X$  を

$$\tau(a, x) = (a, a(x)), \quad (a, x) \in G \times X \quad (3.1)$$

として定義できる. このとき, もし (3.1) のツイスト写像に対し, その複素化およびその正則な摂動  $M$  のクラスをうまく設定できるならば, Siegel-Moser の結果のアナロジーを考えることが可能になるだろう.

この節では, このようなアナロジーのひとつの具体例を扱う. それは, (3.1) において,  $X$  として単位円板  $D_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ ,  $G$  を  $D_1$  に作用する群

$$SU(1, 1) = \left\{ a = \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{q} \\ q & p \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C}) : |p|^2 - |q|^2 = 1 \right\}$$

とした場合である. 各  $a \in SU(1, 1)$  は  $D_1$  に 1 次分数変換として作用する:

$$a(z) = \frac{\bar{p}z + \bar{q}}{qz + p}, \quad z \in D_1.$$

以下では, 次の仮定を満たす  $a_0$  をひとつ固定する:

**仮定 1.**  $|\operatorname{tr} a_0| = |p + \bar{p}| < 2$ .

この仮定を満たす  $a_0$  は楕円的な元と呼ばれる. 良く知られているように, 楕円的な  $a_0$  は  $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$  内に不動点を 2 つもち, その 1 つは  $D_1$  内にある. それを  $z_0$  と表せば, 他の不動点は  $\bar{z}_0^{-1}$  となる.  $z_0$  を 0 へ,  $\bar{z}_0^{-1}$  を  $\infty$  へ, それぞれ移すような  $b \in SU(1, 1)$  とし,

$$b(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (3.2)$$

をとることができる. さらに,  $a_0$  から一意的に定まる  $\omega \in \mathbf{R}$  が存在して,

$$ba_0b^{-1}(\zeta) = e^{i\omega}\zeta, \quad \zeta \in D_1 \quad (3.3)$$

が成り立つ. この  $\omega$  を  $a_0$  の回転角と呼ぶことにしよう. 次の仮定をおく:

**仮定 2.**  $a_0$  の回転角  $\omega$  は, 定義 1 の意味でディオファントス条件を満たす.

さて, 仮定 1 と 2 を満たす  $a_0 \in SU(1, 1)$  を 1 つ与えて,  $a_0$  の  $SU(1, 1)$  における開近傍を  $U_0$  とする. (3.1) の意味での  $SU(1, 1) \times D_1$  上のツイスト写像を  $\tau$  とし, それを  $U_0 \times D_1$  上に制限したものを  $\tau_{U_0}$  と表す:

$$\tau_{U_0}(a, z) = (a, a(z)), \quad (a, z) \in U_0 \times D_1. \quad (3.4)$$

この  $\tau_{U_0}$  を複素化するために,  $SU(1, 1)$  の複素化である

$$SL(2, \mathbf{C}) = \left\{ a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C}) : \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}$$

を考える.  $U_0$  の複素近傍  $W$  とは,  $SL(2, \mathbf{C})$  における開集合  $W$  であって  $U_0 \subset W$  を満たすもののことをいう. また,  $\tau_{U_0}$  の複素化  $\bar{\tau}$  とは,  $U_0$  のある複素近傍  $W$  と  $\mathbf{C}$  における  $\bar{D}_1$  のある近傍  $Z$  があって,

$$\bar{\tau}(a, z) = (a, a(z)), \quad (a, z) \in W \times Z$$

と表される  $W \times Z$  上の正則写像のことをいう.

この意味での  $\tau_{U_0}$  の複素化  $\bar{\tau}$  が ( $U_0$  と  $W$  および  $Z$  を十分小さく絞れば) 存在することを確認しておこう. (3.2) の  $b$  をとると, (3.3) によって,  $ba_0b^{-1}$  は, すべての  $R > 0$  に対し, 円板  $D_R$  を保存する. 一方, (3.2) によって,  $b(\infty) = -\bar{z}_0^{-1}$  となることがわかる. そこで,  $|z_0|^{-1} > 1$  に注意して, 正数  $r_0$  を

$$1 + 3r_0 < |z_0|^{-1} \quad (3.5)$$

となるようにとおこう. このとき,  $b(\infty) = -\bar{z}_0^{-1} \notin \bar{D}_{1+3r_0}$  であるから,

$$\infty = b^{-1}(-\bar{z}_0^{-1}) \notin b^{-1}(\bar{D}_{1+3r_0}) \quad (3.6)$$

となつて,  $a_0: b^{-1}(\bar{D}_{1+3r_0}) \rightarrow b^{-1}(\bar{D}_{1+3r_0})$  は正則とわかる. 一方,  $(a, z) \mapsto bab^{-1}(z)$  は 2 変数  $(a, z)$  について連続だから, 次が成り立つ:

**補題 1**  $a_0$  のある複素近傍  $W_0$  が存在して, すべての  $a \in W_0$  に対し

$$\sup \{ |bab^{-1}(z)| : z \in \bar{D}_{1+r_0} \} \leq 1 + 2r_0$$

がなりたつ.

**証明.**  $\bar{D}_{1+r_0}$  のコンパクト性を用いる. 任意の  $x \in \bar{D}_{1+3r_0}$  に対し, 関数  $(a, z) \mapsto bab^{-1}(z)$  は  $(a, z) = (a_0, x)$  において連続だから,  $a_0$  の複素近傍  $W(x)$  および  $x$  の開近傍  $V(x)$  が存在して,

$$(a, z) \in W(x) \times V(x) \implies |bab^{-1}(z) - ba_0b^{-1}(x)| < r_0 \quad (3.7)$$

がなりたつ.  $\{V(x) : x \in \bar{D}_{1+r_0}\}$  はコンパクト集合  $\bar{D}_{1+r_0}$  の開被覆であるから, その有限部分被覆  $\{V(x_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$  が存在する. そこで,  $W_0$  を

$$W_0 := \bigcap_{i=1}^n W(x_i)$$

によって定義すると,  $W_0$  は  $a_0$  の複素近傍である.  $a \in W_0, z \in \bar{D}_{1+r_0}$  とすると,  $z \in V(x_i)$  となる番号  $i$  が存在するから,  $(a, z) \in W(x_i) \times V(x_i)$  となる. すると, (3.7) から,

$$\begin{aligned} |bab^{-1}(z)| &\leq |ba_0b^{-1}(x_i)| + |bab^{-1}(z) - ba_0b^{-1}(x_i)| \\ &= |x_i| + |bab^{-1}(z) - ba_0b^{-1}(x_i)| \\ &< |x_i| + r_0 \leq 1 + 2r_0 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, 補題が示せた. (証明おわり)

補題 1 が成り立つように  $W_0$  をとると, すべての  $a \in W_0$  に対し, 包含関係

$$bab^{-1}(\bar{D}_{1+r_0}) \subset \bar{D}_{1+2r_0}$$

が成り立つ. この両辺に  $b^{-1}$  を施して,

$$ab^{-1}(\bar{D}_{1+r_0}) \subset b^{-1}(\bar{D}_{1+2r_0})$$

を得るが, (3.6) から

$$\infty \notin b^{-1}(\bar{D}_{1+2r_0})$$

だから, すべての  $a \in W_0$  に対し, 写像

$$a: b^{-1}(\bar{D}_{1+r_0}) \rightarrow b^{-1}(\bar{D}_{1+2r_0})$$



は正則になることがわかる。したがって、複素化

$$\tilde{\tau}: W_0 \times b^{-1}(\bar{D}_{1+r_0}) \rightarrow W_0 \times b^{-1}(\bar{D}_{1+2r_0}) \quad (3.8)$$

が存在することがわかった。

さて、上で存在を確認した複素ツイスト写像  $\tilde{\tau}$  に対し、その正則な摂動

$$M: W_0 \times b^{-1}(\bar{D}_{1+r_0}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \times b^{-1}(\bar{D}_{1+3r_0}) \quad (3.9)$$

$$M(a, z) = (A(a, z), Z(a, z)) \quad (3.10)$$

を考えよう。ただし、 $M$  には次の仮定を置く：

**仮定 3.**  $I$  を  $SL(2, \mathbb{C})$  の単位元とすると、 $(a, z)$  の関数

$$(a, z) \mapsto (a^{-1}A(a, z) - I, Z(a, z) - a(z))$$

は、 $(a, z) = (a_0, z_0)$  において、少なくとも 2 次のオーダーで消える。

**注意.**  $(A(a, z), Z(a, z)) = (aa^{-1}A(a, z), a(z) + Z(a, z) - a(z))$  であるから、 $M$  が正則写像として  $\tilde{\tau}$  に近いというのは、 $W_0 \times b^{-1}(\bar{D}_{1+r_0})$  における

$$\|a^{-1}A - I\| + |Z - a|$$

の上限が小さいことを意味する。ただし、 $\|\cdot\|$  は、 $SL(2, \mathbb{C})$  の元を行列と見たときの、 $\mathbb{C}^2$  から  $\mathbb{C}^2$  への複素線形写像としての作用素ノルムを表す。

また、仮定 3 と同値な条件は次である： $(a_0, z_0)$  の近傍  $U$  および正定数  $C_U$  が存在して、すべての  $(a, z) \in U$  に対し、不等式

$$\|a^{-1}A(a, z) - I\| + |Z(a, z) - a(z)| \leq C_U (\|a - a_0\| + |z - z_0|)^2 \quad (3.11)$$

が成り立つ。

以上の準備の下で、この論文の主定理を述べると

**定理 2**  $a_0 \in SU(1, 1)$  は仮定 1 と 2 を満たすとする。 $z_0 \in D_1$  は  $a_0$  の不動点で、 $b$  は (3.2) で定まる 1 次分数変換だとする。正数  $r_0$  を (3.5) で、 $a_0$  の複素近傍  $W_0$  を補題 1 で定めて、複素数ツイスト写像  $\tilde{\tau}$  を (3.8) によって定め、その正則な摂動  $M$  は仮定 3 を満たすとする。このとき、任意の正数  $\varepsilon$  に対し、 $\varepsilon$  と仮定 1 のディオファントス条件に現れる  $C_0, \mu$  および  $r_0, W_0$  にのみ依存して定まる正数  $\delta$  が存在して、 $X_0 = W_0 \times b^{-1}(\bar{D}_{1+r_0})$  上で評価

$$\sup_{X_0} (\|a^{-1}A - I\| + |Z - a|) \leq \delta$$

を満たすようなすべての  $M$  に対して、以下の (1) から (3) まだが成立する：

(1)  $M$  は次の形の不変集合  $S$  をもつ：

$$S = \{(a, z) : a = a_0 p(\zeta), z = \zeta + q(\zeta), \zeta \in b^{-1}(\bar{D}_{1+2^{-1}r_0})\}.$$

ただし,

$$(p, q): b^{-1}(\bar{D}_{1+2^{-1}r_0}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$$

は,  $b^{-1}(D_{1+2^{-1}r_0})$  で正則,  $b^{-1}(\bar{D}_{1+2^{-1}r_0})$  で連続な写像である.

(2)  $S$  は次の意味で  $\tau$  の不変集合  $\{a_0\} \times b^{-1}(\bar{D}_{1+2^{-1}r_0})$  に近い:

$$\sup(\|p(\zeta) - I\| + |q(\zeta)|) \leq \varepsilon.$$

(3)  $S$  上での  $M$  の作用は,  $\{a_0\} \times b^{-1}(\bar{D}_{1+2^{-1}r_0})$  上での  $a_0$  の作用と共役である. すなわち, すべての  $\zeta \in b^{-1}(\bar{D}_{1+2^{-1}r_0})$  に対し,

$$M(a_0 p(\zeta), \zeta + q(\zeta)) = (a_0 p(a_0 \zeta), a_0 \zeta + q(a_0 \zeta))$$

が成り立つ.

## 4 定理2の証明の方針

この節では, まず, 定理2が  $a_0(z) = e^{i\omega} z$  の場合に ( $z_0 = 0, b = I$  として) 成立するならば, 一般の  $a_0$  に対しても定理が示せること, つまり, 定理2の証明が  $a_0(z) = e^{i\omega} z$  の場合の証明に帰着できることをいう. 次に, この場合についての証明の大筋を述べる.

**第1段.**  $a_0(z) = e^{i\omega} z$  の場合への帰着

定理2が  $a_0(z) = e^{i\omega} z$  の場合には示せているとして, 一般の  $a_0$  の場合を考える. つまり, (3.8) の複素ツイスト写像  $\tilde{\tau} = \tau_{W_0}$  に対し, その摂動  $M$  が正則写像

$$M: W_0 \times b^{-1}(D_{1+r_0}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \times b^{-1}(D_{1+3r_0}) \quad (4.1)$$

$$M(a, z) = (A(a, z), Z(a, z)) \quad (4.2)$$

として与えられていて, 条件:  $(a_0, z_0)$  の近傍  $U$  および正定数  $C_U$  が存在して, すべての  $(a, z) \in U$  に対し, 不等式

$$\|a^{-1}A(a, z) - I\| + |Z(a, z) - a(z)| \leq C_U (\|a - a_0\| + |z - z_0|)^2 \quad (4.3)$$

が成り立つ, を満たすとする.

変換  $\lambda$  を  $\lambda(a, z) = (bab^{-1}, b(z))$  によって定義すると,

$$\lambda: W_0 \times b^{-1}(D_{1+r_0}) \rightarrow bW_0b^{-1} \times D_{1+r_0}$$

は双正則で,  $\lambda(a_0, z_0) = (ba_0b^{-1}, 0)$  を満たす. このとき,

$$\tau_{bW_0b^{-1}} = \lambda\tau_{W_0}\lambda^{-1} \quad (4.4)$$

が成り立つ. ただし,  $\tau_{bW_0b^{-1}}$  は,  $\tau_{bW_0b^{-1}}: bW_0b^{-1} \times D_{1+r_0} \rightarrow bW_0b^{-1} \times D_{1+2r_0}$  を満たす複素ツイスト写像を表す. そこで,  $\tilde{M}$  を  $\tilde{M} := \lambda M \lambda^{-1}$  と定義すると,

$$\tilde{M}: bW_0b^{-1} \times D_{1+r_0} \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \times D_{1+3r_0} \quad (4.5)$$

となって, (4.4) から,  $\tilde{M}$  は複素ツイスト写像  $\tau_{bW_0b^{-1}}$  の正則な摂動であることがわかる.  
この  $\tilde{M}$  を

$$\tilde{M}(\alpha, \zeta) = (\tilde{A}(\alpha, \zeta), \tilde{Z}(\alpha, \zeta))$$

と表すと,

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\alpha, \zeta) &= bA(b^{-1}\alpha b, b^{-1}\zeta)b^{-1}, \\ \tilde{Z}(\alpha, \zeta) &= bZ((b^{-1}\alpha b, b^{-1}\zeta))\end{aligned}$$

となることがわかる. これより,  $a = b^{-1}\alpha b$ ,  $z = b^{-1}\zeta$  と置くと,

$$\begin{aligned}& \|\alpha^{-1}\tilde{A}(\alpha, \zeta) - I\| + |\tilde{Z}(\alpha, \zeta) - \alpha(\zeta)| \\ &= \|ba^{-1}A(a, z)b^{-1} - I\| + |bZ(a, z) - ba(z)|\end{aligned}\quad (4.6)$$

が成り立つ.

**補題 2** すべての正数  $R$  に対し,

$$C_R := \sup\{|1 - \bar{z}_0 z|^{-1} : z \in b^{-1}(D_R)\}$$

は有限な値であり, 任意の  $Z, W \in b^{-1}(D_R)$  に対して, 次の不等式が成り立つ:

$$|b(Z) - b(W)| \leq C_R^2(1 - |z_0|^2)|Z - W|. \quad (4.7)$$

証明.  $C_R$  が有限値であることは,  $b$  の定義から,  $b(\bar{z}_0^{-1}) = \infty \notin \bar{D}_R$  であるから,  $\bar{z}_0^{-1} = b^{-1}(\infty) \notin b^{-1}(\bar{D}_R)$  となることによる.

後半の評価式も, 再び  $b$  の定義を用いて

$$\begin{aligned}b(Z) - b(W) &= \frac{Z - z_0}{1 - \bar{z}_0 Z} - \frac{W - z_0}{1 - \bar{z}_0 W} \\ &= \frac{(Z - z_0)(1 - \bar{z}_0 W) - (W - z_0)(1 - \bar{z}_0 Z)}{(1 - \bar{z}_0 Z)((1 - \bar{z}_0 W))} \\ &= \frac{(Z - W)(1 - |z_0|^2)}{(1 - \bar{z}_0 Z)((1 - \bar{z}_0 W))}\end{aligned}$$

であることから, 従う.(証明おわり)

補題 2 を  $R = 1 + 3r_0$  として (4.6) の右辺の第 2 項に用いると,

$$\begin{aligned}(4.6) \text{ の右辺} &= \|ba^{-1}A(a, z)b^{-1} - I\| + |bZ(a, z) - ba(z)| \\ &\leq \|b\| \|b^{-1}\| \|a^{-1}A(a, z) - I\| + C_{1+3r_0}^2 |Z(a, z) - a(z)| \\ &\leq C(\|a^{-1}A(a, z) - I\| + |Z(a, z) - a(z)|)\end{aligned}\quad (4.8)$$

となる. ただし,  $C := \max\{\|b\| \|b^{-1}\|, C_{1+3r_0}^2\}$ .

ここで,  $(\alpha, \zeta) \in \lambda(U)$  とすると,  $(a, z) \in U$  であるから, (4.3) を用いて,

$$(4.8) \text{ の右辺} \leq CC_U(\|a - a_0\| + |z - z_0|)^2 \quad (4.9)$$

が得られる。ところが, (4.8) と同様にして

$$\begin{aligned} \|a - a_0\| + |z - z_0| &= \|b^{-1}\alpha b - a_0\| + |b^{-1}(\zeta) - b^{-1}(0)| \\ &\leq C'(\|\alpha - ba_0b^{-1}\| + |\zeta|) \end{aligned} \quad (4.10)$$

が成り立つ。(4.9) と (4.10) から,

$$\begin{aligned} \|\alpha^{-1}\tilde{A}(\alpha, \zeta) - I\| + |\tilde{Z}(\alpha, \zeta) - \alpha(\zeta)| \\ \leq CC_U C'^2(\|\alpha - ba_0b^{-1}\| + |\zeta|)^2 \end{aligned}$$

となる。これは,  $\tilde{M}$  が  $(\alpha, \zeta) = (ba_0b^{-1}, 0)$  の近傍  $\lambda(U)$  において, 仮定 3 を満たすことを意味する。

さて,  $ba_0b^{-1}(\zeta) = e^{i\omega}\zeta$  であって,  $\tilde{M}$  は複素ツイスト写像

$$\tilde{\tau} = \tau_{bW_0b^{-1}}: (\alpha, \zeta) \mapsto (\alpha, \alpha(\zeta))$$

の正則な摂動であり仮定 3 を満たしている。すると, この場合に定理 2 が成り立つことを仮定しているので, 任意の正数  $\varepsilon$  に対し, 正数  $\tilde{\delta}$  が存在して,  $\tilde{X}_0 := bW_0b^{-1} \times D_{1+r_0}$  と置くと,

$$\sup_{\tilde{X}_0} (\|\alpha^{-1}\tilde{A}(\alpha, \zeta) - I\| + |\tilde{Z}(\alpha, \zeta) - \alpha(\zeta)|) \leq \tilde{\delta}$$

であれば, 以下のことが成立する:

(i)  $\tilde{M}$  は次の形の不変集合  $\tilde{S}$  をもつ。

$$\tilde{S} = \{(\alpha, \zeta) : \alpha = ba_0b^{-1}\tilde{p}(\xi), \zeta = \xi + \tilde{q}(\xi), \xi \in \bar{D}_{1+2^{-1}r_0}\}.$$

ただし,

$$(\tilde{p}, \tilde{q}): \bar{D}_{1+2^{-1}r_0} \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$$

は  $D_{1+2^{-1}r_0}$  で正則かつその境界まで込めて連続な写像である。

(ii)  $\tilde{S}$  は  $\tilde{\tau}$  の不変集合  $\{ba_0b^{-1}\} \times \bar{D}_{1+2^{-1}r_0}$  に次の意味で近い:

$$\sup \{ \|\tilde{p}(\xi) - I\| + |\tilde{q}(\xi)| : \xi \in D_{1+2^{-1}r_0} \} \leq \tilde{\varepsilon}.$$

(iii)  $\tilde{S}$  上での  $\tilde{M}$  の作用と,  $\{ba_0b^{-1}\} \times \bar{D}_{1+2^{-1}r_0}$  上での  $ba_0b^{-1}$  の作用とは共役である。

そこで, 改めて任意の正数  $\varepsilon$  を与えて,  $\tilde{\varepsilon}$  を  $C'\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$  となるようにとる。次に, この  $\tilde{\varepsilon}$  に対して定まる  $\tilde{\delta}$  をとって, それに対して正数  $\delta$  を,  $\delta \leq C^{-1}\tilde{\delta}$  を満たすように決める。すると, もし,  $X_0 := W_0 \times b^{-1}(D_{1+r_0})$  上で

$$\sup_{X_0} (\|a^{-1}A(a, z) - I\| + |Z(a, z) - a(z)|) \leq \delta$$

ならば, (4.8) から

$$\begin{aligned} \sup_{\tilde{X}_0} (\|\alpha^{-1}\tilde{A}(\alpha, \zeta) - I\| + |\tilde{Z}(\alpha, \zeta) - \alpha(\zeta)|) \\ \leq C \sup_{X_0} (\|a^{-1}A(a, z) - I\| + |Z(a, z) - a(z)|) \leq C\delta \leq \tilde{\delta} \end{aligned}$$

だから, 上の (ĩ) から (ĩ) までは成り立つ. そこで,  $S := \lambda^{-1}(\tilde{S})$  と定めれば, 上の性質 (ĩ) および  $\lambda$  の定義によって

$$\begin{aligned} S &= \{ \lambda^{-1}(ba_0b^{-1}\tilde{p}(\xi), \xi + \tilde{q}(\xi)) \} \\ &= \{ (a_0b^{-1}\tilde{p}(\xi)b, b^{-1}(\xi + \tilde{q}(\xi))) \}. \end{aligned}$$

そこで, パラメータ  $\xi \in \bar{D}_{1+2^{-1}r_0}$  を  $\zeta = b^{-1}(\xi)$  に取り替えて,  $p(\zeta), q(\zeta)$  をそれぞれ

$$\begin{aligned} p(\zeta) &:= b^{-1}\tilde{p}(b\zeta)b, \\ q(\zeta) &:= b^{-1}(b\zeta + \tilde{q}(b\zeta)) - \zeta \end{aligned} \quad (4.11)$$

によって定義すれば,

$$S = \{ (a_0p(\zeta), \zeta + q(\zeta)) : \zeta \in b^{-1}(\bar{D}_{1+2^{-1}r_0}) \} \quad (4.12)$$

となって, 定理 2 の (1) が成り立つ. さらに, (4.11) と (4.10) および上の性質 (ĩ) により,  $\zeta \in b^{-1}(D_{1+2^{-1}r_0})$  ならば

$$\begin{aligned} \|p(\zeta) - I\| + |q(\zeta)| &\leq \|b\| \|b^{-1}\| \|\tilde{p}(b\zeta) - I\| + |b^{-1}(b\zeta + \tilde{q}(b\zeta)) - b^{-1}(b\zeta)| \\ &\leq C' (\|\tilde{p}(b\zeta) - I\| + |\tilde{q}(b\zeta)|) \\ &\leq C' \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

だから, 定理 2 の (2) の成立もわかる. さらに,  $M = \lambda^{-1}\tilde{M}\lambda$  だから, 上の性質 (ĩ) を用いて

$$\begin{aligned} M(a_0p(\zeta), \zeta + q(\zeta)) &= \lambda^{-1}\tilde{M}\lambda(a_0p(\zeta), \zeta + q(\zeta)) \\ &= \lambda^{-1}\tilde{M}(ba_0p(\zeta)b^{-1}, b(\zeta + q(\zeta))) \\ &= \lambda^{-1}\tilde{M}(ba_0b^{-1}\tilde{p}(b\zeta), b\zeta + \tilde{q}(b\zeta)) \\ &= \lambda^{-1}\tilde{M}(ba_0b^{-1}\tilde{p}(\xi), \xi + \tilde{q}(\xi)) \\ &= \lambda^{-1}(ba_0b^{-1}\tilde{p}(ba_0b^{-1}\xi), ba_0b^{-1}\xi + \tilde{q}(ba_0b^{-1}\xi)) \\ &= \lambda^{-1}(ba_0b^{-1}\tilde{p}(ba_0\zeta), ba_0\zeta + \tilde{q}(ba_0\zeta)) \\ &= (b^{-1}ba_0b^{-1}\tilde{p}(ba_0\zeta)b, b^{-1}(ba_0\zeta + \tilde{q}(ba_0\zeta))) \\ &= (a_0b^{-1}\tilde{p}(ba_0\zeta)b, b^{-1}b(a_0\zeta + q(a_0\zeta))) \\ &= (a_0p(a_0\zeta), a_0\zeta + q(a_0\zeta)) \end{aligned}$$

となって, 定理 2 の (3) も示せる. (第 1 段おわり)

## 第 2 段. $a_0(z) = e^{i\omega}z$ の場合の定理 2 の証明の大筋

以下では,  $\omega$  はディオファントス条件を満たす実数とし,  $a_0(z) = e^{i\omega}z$  だとする. また,  $W_0$  は  $a_0$  の  $SL(2, \mathbb{C})$  における開近傍で,  $W_0 \times D_{1+r_0}$  上で複素ツイスト写像  $\tilde{\tau}$  が定義されて

いるとする.  $SL(2, \mathbb{C})$  は Lie 群だから,  $W_0$  は, 単位元  $I$  の近傍  $U_0$  を用いて,  $W_0 = a_0(U_0)$  と表すことができる.

この  $U_0$  に以下のような座標系  $y = (y_1, y_2, y_3)$  を導入する.  $2 \times 2$  行列

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in U_0$$

に対して,  $y$  を

$$\beta = \alpha y_1, \gamma = \delta y_2, \alpha = 1 + y_3 \quad (4.13)$$

により定義する. 関係式  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  より

$$\alpha\delta(1 - y_1y_2) = \delta(1 + y_3)(1 - y_1y_2) = 1$$

だから,  $y \in D_1^3$  (つまり,  $|y_j| < 1$ ) であれば,

$$u = u_y = \begin{pmatrix} 1 + y_3 & (1 + y_3)y_1 \\ (1 - y_1y_2)^{-1}(1 + y_3)^{-1}y_2 & (1 - y_1y_2)^{-1}(1 + y_3)^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

となって,  $y \mapsto u_y$  は双正則な対応となる. この  $u_y$  による  $z \in D_{1+r_0}$  の像を

$$F(y, z) := u_y(z) = (1 - y_1y_2)(1 + y_3)^2 \frac{z + y_1}{y_2z + 1} \quad (4.15)$$

と表す. 特に,  $F(0, z) = z$  となる.

さて,  $a_0$  の複素近傍  $W_0$  は (補題 1 の要請を  $b = I$  としてみたす位に) 小さいから, 正数  $s_0$  を十分小さくとると,  $U_0 = \{u_y : y \in D_{s_0}^3\}$  に対する  $W_0 = a_0(U_0)$  はこの要請を満たすとしてよい. このとき,  $y \in D_{s_0}^3$  と  $a = a_0u_y \in W_0$  を同一視して, ツイスト写像

$$\tilde{\tau}: (a, z) = (a_0u_y, z) \mapsto (a_0u_y, a_0u_y(z))$$

を, 写像

$$\hat{\tau}: (y, z) \mapsto (y, a_0F(y, z))$$

と同一視できる. 同様に,  $\tilde{\tau}$  の正則な摂動

$$M: (a, z) \mapsto (A(a, z), Z(a, z))$$

についても,

$$\begin{aligned} A(a, z) &= a_0a_0^{-1}A(a, z) = a_0u_Y = a_0u_{y+f(y, z)} \\ Z(a, z) &= a(z) + Z(a, z) - a(z) = a(z) + g(y, z) \end{aligned}$$

と考えると,  $M$  を次の写像  $\hat{M}$  と同一視できる:

$$\hat{M}: (y, z) \mapsto (y + f(y, z), a_0F(y, z) + g(y, z)). \quad (4.16)$$

このとき, 次が成立する:

**補題 3**  $M$  についての仮定 3 は,  $(f, g)$  が  $(y, z) = (0, 0) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$  において, 少なくとも 2 次のオーダーで消えることと同値である.

証明.  $z_0 = 0$  であるから, 仮定 3 は,  $(a^{-1}A(a, z) - I, Z(a, z) - a(z))$  が  $(a, z) = (a_0, 0)$  において少なくとも 2 次のオーダーで消えることである. この関数の第 2 成分を座標  $(y, z)$  を用いて表したものが  $g(y, z)$  であるから,  $(y, z) = (0, 0)$  が  $(a, z) = (a_0, 0)$  に対応することに注意すれば,  $g$  についての主張が従う.

一方, 上の  $f$  の定め方から,

$$\begin{aligned} a^{-1}A(a, z) - I &= (a_0 u_y)^{-1} A(a, z) - I \\ &= u_y^{-1} a_0^{-1} A(a, z) - I \\ &= u_y^{-1} u_{y+f(y, z)} - I \end{aligned} \quad (4.17)$$

がわかる. すると, 左辺を  $(y, z)$  の関数と見るとき, まず仮定 3 から, これが  $(0, 0)$  で少なくとも 1 次のオーダーで消えることがわかり, これより  $u_{f(0,0)} = u_0 = I$  がいえ,  $f(0, 0) = 0$  がいえる.

次に, (4.14) において  $y$  を  $y + f(y, z)$  で取り替えたものを考え, それを  $f$  についてテイラー展開することによって, 行列としての等式

$$u_{y+f} = u_y + \begin{pmatrix} f_3 & f_1 \\ f_2 & -f_3 \end{pmatrix} + (y)(f) + (f)^2$$

が得られる. ただし,  $(y)$  と  $(f)$  は, それぞれ,  $y_1, y_2, y_3$  および  $f_1, f_2, f_3$  が生成するイデアルである. したがって, (4.17) の右辺は

$$\begin{aligned} u_y^{-1} u_{y+f(y, z)} - I &= u_y^{-1} \left\{ u_y + \begin{pmatrix} f_3 & f_1 \\ f_2 & -f_3 \end{pmatrix} + (y)(f) + (f)^2 \right\} - I \\ &= u_y^{-1} \begin{pmatrix} f_3 & f_1 \\ f_2 & -f_3 \end{pmatrix} + (y)(f) + (f)^2 \\ &= \begin{pmatrix} f_3 & f_1 \\ f_2 & -f_3 \end{pmatrix} + (y)(f) + (f)^2 \end{aligned}$$

となることがわかる. したがって,  $a^{-1}A(a, z) - I$  が  $(a_0, 0)$  において少なくとも 2 次のオーダーで消えることは,  $f(y, z)$  が  $(0, 0)$  において 2 次のオーダーで消えることと同値となる. (証明おわり)

以下では,  $M$  の代わりに  $\hat{M}$  を考える. 補題 3 によって, 仮定 3 を次の仮定 4 に置き換えてよい:

**仮定 4.**  $(f, g)$  が  $(y, z) = (0, 0) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$  において, 少なくとも 2 次のオーダーで消える.

以上のように座標を入れて考えると,  $a_0(z) = e^{i\omega} z$  の場合の定理 2 の証明は, 次の定理を証明することに帰着された:

**定理 3**  $\omega$  はディオファントス条件を満たす実数とし,  $a_0(z) = e^{i\omega} z$  だとする. 写像  $F(y, z)$  は (4.15) で定まるとし,  $\hat{\tau}$  と  $\hat{M}$  はそれぞれ,

$$\begin{aligned}\hat{\tau}(y, z) &= (y, a_0 F(y, z)) \\ \hat{M}(y, z) &= (y + f(y, z), a_0 F(y, z) + g(y, z))\end{aligned}\quad (4.18)$$

で定まる写像で, これらはともに  $D_{s_0}^3 \times D_{1+r_0}$  において正則かつ境界まで込めて連続だとする. さらに, 仮定 4 が満たされるとする. このとき, 任意の正数  $\varepsilon$  に対し,  $\varepsilon, C_0, \mu$  および  $r_0, s_0$  にのみ依存する正数  $\delta$  が存在して,  $X_0 = D_{s_0}^3 \times D_{1+r_0}$  上において

$$\sup_{X_0} (|f| + |g|) \leq \delta$$

であるようなすべての  $\hat{M}$  に対して, 以下の (1) から (3) までは成り立つ:

(1)  $\hat{M}$  は次の形の不変集合  $\hat{S}$  をもつ.

$$\hat{S} = \{(y, z) \in X_0 : y = \hat{p}(\zeta), z = \zeta + \hat{q}(\zeta), \zeta \in \bar{D}_{1+2^{-1}r_0}\}.$$

ただし,  $(\hat{p}, \hat{q}): \bar{D}_{1+2^{-1}r_0} \rightarrow \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$  は,  $D_{1+2^{-1}r_0}$  において正則かつ境界まで込めて連続である.

(2)  $\hat{S}$  は,  $\hat{\tau}$  の不変集合  $\{0\} \times \bar{D}_{1+2^{-1}r_0}$  に次の意味で近い:

$$\sup \{|\hat{p}| + |\hat{q}| : \zeta \in \bar{D}_{1+2^{-1}r_0}\} \leq \varepsilon.$$

(3)  $\hat{S}$  上での  $\hat{M}$  の作用は,  $\bar{D}_{1+2^{-1}r_0}$  上での  $a_0$  の作用と共役である.

この定理 3 の証明は, 第 2 節で紹介した定理 1 の証明の大筋とほぼ平行に進行する. つまり, 集合の減少列  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  を

$$X_n = D_{s_n}^3 \times D_{1+r_n}$$

の形で構成する. ただし, 正数列  $\{s_n\}$  と  $\{r_n\}$  は

$$s_n \rightarrow 0, \quad r_n = 2^{-1}r_0(1 + 2^{-n}) \rightarrow 2^{-1}r_0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるようにとる. さらに, 各第  $n$  ステップにおいて,  $X_n$  と  $X_{n+1}$  の間を,  $X_n \supset X_n^{(1)} \supset X_n^{(2)} \supset X_n^{(3)} \supset X_{n+1}$  と補間する集合  $X_n^{(\nu)}$  をとって, 恒等変換に近い座標変換の列  $\{U_n\}_{n=0}^\infty$  と正則写像の列  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  を,

$$\begin{aligned}U_n(y, z) &= (y + u_n(y, z), z + v_n(y, z)) \\ M_n(y, z) &= (y + f_n(y, z), a_0 F(y, z) + g_n(y, z)) \\ M_0(y, z) &= \hat{M}(y, z)\end{aligned}$$

であって, 次の図式が定義できてかつ可換になるように, 構成する:

$$\begin{array}{ccccc}X_{n+1} & \xrightarrow{U_n} & X_n^{(3)} & \xrightarrow{i_n} & X_n \\ M_{n+1} \downarrow & & \downarrow M_n & & \downarrow M_n \\ X_n^{(1)} & \xleftarrow{U_n^{-1}} & X_n^{(2)} & \xrightarrow{j_n} & X_{n-1}^{(1)}\end{array}$$



ただし,  $i_n, j_n$  はそれぞれ包含写像である.

このとき, 第2節の命題1 および 2 と同じ主張が成り立つことを示せば, 定理3の証明が完結する.

これらの命題の証明の詳細はここでは省略するが, これらの命題を成立させるような列  $\{U_n\}$  と  $\{M_n\}$  の構成の根拠を与える補題を述べておこう. この補題の原型は Siegel-Moser [7] にあり, そこでも彼らの結果の証明の鍵になっている. 彼らのテキストでは, その補題の証明に第33節のすべてが費やされている. そして我々の問題においても, 以下に述べる補題が, やはり鍵の役割を果たす.

まず, 設定を述べよう. 以下に出てくる定数  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) はディオファントス条件に現れる定数  $C_0, \mu$  にのみ依存して定まる, 1 より大きい絶対定数であるとする. 正数  $r, \rho, s, \sigma, d$  は以下の不等式

$$\begin{aligned} 2^{-1}r_0 &< \rho < r \leq r_0 \leq 1, \\ 0 &< 3\sigma < s < C_2^{-1}(r - \rho), \\ d &< 6^{-1}s, \\ \vartheta &:= C_1(r - \rho)^{-2\mu-2}\frac{d}{s} < 8^{-1}(r - \rho) \end{aligned}$$

を満たすとする. また  $M = \hat{M}$  は  $A := D_s^3 \times D_{1+r}$  上で定義された (4.18) の形の正則写像で,

$$\sup_A (|f| + |g|) \leq d$$

を満たすとする. さらに,  $B := D_\sigma^3 \times D_{1+\rho}$  とし,  $A \supset A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset A^{(3)} \supset B$  となる補間集合  $A^{(\nu)}$  が, 次のように与えられているとする:

$$\begin{aligned} A^{(\nu)} &= D_{s^{(\nu)}}^3 \times D_{1+r^{(\nu)}}, \\ r^{(\nu)} &= r - 4^{-1}\nu(r - \rho), \\ s^{(\nu)} &= s - 4^{-1}\nu(s - \sigma). \end{aligned}$$

以上の設定で次の補題が成り立つ.

**補題 4**  $\omega$  はディオファントス条件を満たす実数で,  $a_0(z) = e^{i\omega}z$  とし,  $M = \hat{M}$  は仮定 4 を満たすとする. このとき,  $A$  上の座標変換  $U(y, z) = (y + u(y, z), z + v(y, z))$  が存在して, 以下の (1) から (4) までは成立する:

(1)  $(u, v)$  は  $A$  上で正則で, 次の3つの評価式をすべて満たす:

$$\begin{aligned} \sup_{A^{(1)}} (|u| + |v|) &\leq \vartheta s, \\ \sup_{A^{(1)}} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial y_j} \right| \right) &\leq \vartheta \quad (j = 1, 2, 3), \\ \sup_{A^{(1)}} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \right) &\leq \vartheta \frac{s}{r - \rho} < \vartheta C_2^{-1} < \vartheta. \end{aligned}$$

(2) 次の3つの包含関係式が成り立つ :

$$\begin{aligned} U(B) &\subset A^{(3)}, \\ M(A^{(3)}) &\subset A^{(2)}, \\ U^{-1}(A^{(2)}) &\subset A^{(1)}. \end{aligned}$$

上の包含関係式によって, 合成写像  $N := U^{-1}MU: B \rightarrow A^{(1)}$  が定義でき, これを

$$N(y, z) = (y + \varphi(y, z), a_0 F(y, z) + \psi(y, z))$$

と表すと

- (3)  $(\varphi, \psi)$  は  $B$  で正則で,  $(y, z) = (0, 0)$  において少なくとも2次のオーダーで消える.  
 (4) 絶対定数  $C_3$  が存在して,

$$\sup_B (|\varphi| + |\psi|) \leq C_3 \left[ (r - \rho)^{-2\mu-3} \left( \frac{d^2}{s} + sd \right) + \left( \frac{\sigma}{s} \right)^2 d \right].$$

## 参考文献

- [1] Arnold, V. I., Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of quasi-periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian, *Russian Math. Surveys*, **18** (1963), 9-36.
- [2] Arnold, V. I., Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, *Russian Math. Surveys*, **18** (1963), 85-192.
- [3] Arnold, V.I. and Avez, A., *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [4] Kolmogorov, A. N., On the conservation of conditionally periodic motions for a small change of Hamiltonian, *Soviet Math. Doklady*, **98** (1954), 527-530.
- [5] Lazutkin, V. F., *KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [6] Moser, J. K., On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, Math.-phys.*, **K1** (1962), 1-20.
- [7] Siegel, C. L. and Moser, J. K., *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.